Т е о р е м а. Геометрия дифференциального уравнения второго порядка с частными производными (I), удовлетворяющего условию невырожденности (6), индуцирует на каждом решении уравнения аффинную связность без кручения, компоненты которой вычисляются по формулам (7), и относительный инвариант (8).

П р и м е р. Рассмотрим в качестве примера обобщенное уравнение $\sin$-Гордона $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}-\sin u$. Оно имеет, в частности, решение:

$$u=4\,\mathrm{arctg}\, e^{\sqrt{2}(x+y)-t} \qquad (9)$$

Вычисляя указанным выше образом основные объекты в голономном репере, мы устанавливаем, что индуцируемая на решении (9) связность – плоская.

Библиографический список


1. В а с и л ь е в А.М. Теория дифференциально-геометрических структур. М.: Изд-во МГУ, 1987. 190 с.

2. Л а п т е в Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.I. С.139-189.


УДК 514.75

## О ФОКАЛЬНОСТИ ПОЛЯ ОСОБЫХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ГИПЕРСФЕРЕ


Е.В.С и л а е в

(Московский государственный педагогический институт)


Пусть поверхность $V_p$ лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ с центром в точке $O$ и радиусом $r$ в евклидовом пространстве $E_n$. Присоединим к поверхности $V_p$ подвижный репер

$$R=\{x,\vec e_i,\vec e_\alpha\}\qquad (i,j=\overline{1,p};\ \alpha,\beta=\overline{p+1,n})$$

так, чтобы векторы $\vec e_i$ лежали в касательном пространстве $T_x$ к поверхности $V_p$ в точке $x$, а векторы $\vec e_\alpha$ составляли ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_x$ к пространству $T_x$ в точке $x$. Деривационные формулы репера $R$ имеют вид:

$$d\overrightarrow{Ox}=\omega^i\vec e_i,\ d\vec e_i=\omega_i^j\vec e_j+\omega_i^\alpha\vec e_\alpha,\ d\vec e_\alpha=\omega_\alpha^i\vec e_i+\omega_\alpha^\beta\vec e_\beta. \qquad (1)$$



В работе [3] было доказано, что если поверхность $V_p$ лежит на гиперсфере евклидова пространства, то в плоскости главной нормали $N_q(x)$ не существует других нормалей, кроме нормали $O'x$, относительно которых поверхность $V_p$ являлась бы омбилической ( $O'$ – ортогональная проекция точки $O$ на плоскость $N_q(x)$ ). Нормаль $O'x$ называется особой нормалью [1]. Направим вектор $\vec e_{p+1}$ вдоль вектора $\overrightarrow{O'x}$, тогда

$$\overrightarrow{O'x}=x^{p+1}\vec e_{p+1}\qquad (x^{p+1}\neq 0).$$

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$\vec e_{\hat a}\parallel N_q(x)\ \ (\hat a=\overline{p+2,p+q}),\ \ \vec e_\sigma\perp N_q(x)\ \ (\sigma,\delta=\overline{p+q+1,n}).$$

Тогда равенство $\overrightarrow{Ox}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'x}$ можно записать следующим образом:

$$\overrightarrow{Ox}=x^\sigma\vec e_\sigma+x^{p+1}\vec e_{p+1}, \qquad (2)$$

где $x^\sigma\vec e_\sigma=\overrightarrow{OO'}$.

При смещении точки $x$ вдоль поверхности $V_p$ имеем $\omega^\alpha=0$. Дифференцируя это уравнение внешним образом и применяя лемму Картана, получим

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\quad b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha.$$

Так как векторы $\vec e_{p+1},\vec e_{\hat a}$ параллельны плоскости $N_q(x)$, то, как известно [2], $b_{ij}^\sigma=0$, откуда следует, что

$$\omega_i^\sigma=0 \qquad (3)$$

Дифференцируя равенства $\vec e_i\cdot\vec e_\sigma=0$, получим, что $\omega_\sigma^j\gamma_{ji}+\omega_i^\sigma=0$, где $\gamma_{ij}=\vec e_i\cdot\vec e_j$. Откуда в силу равенств (3) получим, что

$$\omega_\sigma^j=0. \qquad (4)$$

Дифференцируя равенство (2) с учетом формул (I), имеем:

$$\omega^i=x^{p+1}\omega_{p+1}^i, \qquad (5а)$$

$$dx^{p+1}+x^\delta\omega_\delta^{p+1}=0, \qquad (5б)$$

$$x^{p+1}\omega_{p+1}^{\hat a}+x^\delta\omega_\delta^{\hat a}=0, \qquad (5в)$$

$$x^{p+1}\omega_{p+1}^\sigma+dx^\sigma+x^\delta\omega_\delta^\sigma=0. \qquad (5г)$$

Рассмотрим точку $F$ : $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{Ox}+\rho\vec e_{p+1}$ на особой нормали $O'x$. Тогда

$$d\overrightarrow{OF}=(\omega^i+\rho\,\omega_{p+1}^i)\vec e_i+d\rho\,\vec e_{p+1}+\rho\,\omega_{p+1}^{\hat a}\vec e_{\hat a}+\rho\,\omega_{p+1}^\sigma\vec e_\sigma.$$

Точка $F$ является фокусом нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ к поверхности $\vartheta_p$ в точке $x$ тогда и только тогда, когда при смещении точки $x$ по поверхности $\vartheta_p : d\overrightarrow{OF} \parallel N_{n-p}(x)$, т.е. когда

$$\omega^i + \rho\omega^i_{p+1} = 0.$$

Из равенства (5а), которое справедливо при любом смещении точки $x$ по поверхности $\vartheta_p$, находим $\omega^i_{p+1} = \frac{1}{x^{p+1}}\omega^i$, т.е. $F$ – фокус нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ тогда и только тогда, когда $\omega^i + \rho\frac{1}{x^{p+1}}\omega^i = 0$ при смещении точки $x$ по поверхности $\vartheta_p$.

Из последнего равенства находим $\rho = -x^{p+1}$. Следовательно, точка $F$ – фокус нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{Ox} - x^{p+1}\vec{e}_{p+1} = \overrightarrow{OO'},$$

т.е. $F \equiv O'$. Итак, доказана

Т е о р е м а 1. Если поверхность $\vartheta_p$ лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства, то на прямой $O'x$ существует единственный p-кратный фокус нормальной плоскости к поверхности $\vartheta_p$ в точке $x$ – точка $O'$.

Дифференцируя равенство $\overrightarrow{OO'} = x^\sigma\vec{e}_\sigma$ с учетом формул (1) и (5г), получим:

$$d\overrightarrow{OO'} = x^\sigma\omega^{p+1}_\sigma\vec{e}_{p+1} + x^\sigma\omega^{\hat{a}}_\sigma\vec{e}_{\hat{a}} - x^{p+1}\omega^\sigma_{p+1}\vec{e}_\sigma. \qquad (6)$$

Откуда следует, что точка $O'$ является фокусом плоскости главной нормали $N_q(x)$ тогда и только тогда, когда при смещении точки $x$ по поверхности $\vartheta_p$ : $\omega^\sigma_{p+1} = 0$ или $\omega^{p+1}_\sigma = 0$. Легко видеть, что если $\omega^{p+1}_\sigma = 0$, то из равенства (5б) следует, что $dx^{p+1} = 0$, т.е. $x^{p+1} = const$, что равносильно условию $\overrightarrow{O'x}^2 = const$ или $\overrightarrow{OO'} = const$. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 2. Пусть поверхность $\vartheta_p$ лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства. Если точка $O'$ – фокус плоскости главной нормали $N_q(x)$, то при смещении точки $x$ по поверхности $\vartheta_p$ точка $O'$ смещается по гиперсфере с центром в точке $O$.

Из равенства (6) следует, что семейство прямых $O'x$ является фокальным (точка $O'$ – фокус) тогда и только тогда, когда при смещении точки $x$ по поверхности $\vartheta_p : d\overrightarrow{OO'} \parallel \vec{e}_{p+1}$, т.е. когда имеет место система уравнений

$$x^\sigma\omega^{\hat{a}}_\sigma = 0, \qquad \omega^\sigma_{p+1} = 0. \qquad (7)$$

Так как $\vec{e}_{p+1} \perp \vec{e}_\sigma$, то система (7) равносильна системе



$$x^\sigma\omega^{\hat{a}}_\sigma = 0, \quad \omega^\sigma_{p+1} = 0, \quad \omega^{p+1}_\sigma = 0,$$

которая означает, что $d\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$, т.е. $O' = const$. Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. Пусть поверхность $\vartheta_p$ лежит на гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства. $O'$ – фокус особой нормали $O'x$ тогда и только тогда, когда при смещении точки $x$ по поверхности $\vartheta_p$ точка $O'$ неподвижна, т.е. семейство особых нормалей содержится в связке прямых с центром в точке $O'$.

Библиографический список


1. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства // Сибирский матем. ж. Новосибирск, 1966. Т.7. №3. С.499-511.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Литовский матем. сб. / АН Лит.ССР. Вильнюс, 1966. Т.VI. №4. С.475-491.

3. С и л а е в Е.В. О полях особых нормалей поверхности лежащей на гиперсфере в евклидовом пространстве $E_n$ // Геометрия погруженных многообразий: Сб. науч. тр. М., 1985. С.87-92.


УДК 514.75

## О ЦЕНТРАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ НА ГИПЕРСФЕРИЧЕСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ


Г.М.С и л а е в а

(Московский государственный педагогический институт)


Пусть в $n$-мерном евклидовом пространстве заданы две гладкие гиперповерхности $V_{n-1}, \overline{V}_{n-1}$ и диффеоморфизм $f : V_{n-1} \to \overline{V}_{n-1}$, при котором $\forall x \in V_{n-1} : y = f(x) \neq x$. Присоединим к каждой точке $x$ поверхности $V_{n-1}$ подвижной репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_n\}$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ $(i,j = 1,2,\ldots,n-1)$ принадлежали касательному пространству к поверхности $V_{n-1}$ в точке $x$, а вектор $\vec{e}_n$ являлся ортом вектора $\overrightarrow{xy}$. Предполагаем, что вектор $\overrightarrow{xy}$ не параллелен ни касательному пространству к поверхности $V_{n-1}$ в точке $x$, ни касательному пространству к поверхности $\overline{V}_{n-1}$ в соответствующей точке $y$.